# Лабораторная работа

**Тема:** **Задачи принятия решений на основе бинарных**

**отношений предпочтений**

***Бинарные отношения***

Важным предположением в языке бинарных отношений является независимость предпочтения двух альтернатив от любой третьей. Бинарные отношения могут быть установлены на множестве альтернатив и множестве критериев. И в том и в другом случае для каждой пары сравниваемых объектов некоторым образом можно установить, что один из них предпочтительнее другого либо они равноценны или несравнимы.

В общем виде для задания бинарного отношения *R* на множестве *Х* необходимо тем или иным способом указать все пары (*x*, *y)* множества *Х*, для которых выполнено отношение *R*.

Существует четыре способа задания отношений:

1) непосредственное перечисление пар,

2) матричный,

3) графовый,

4) сечением.

Рассмотрим пример отношений в студенческой группе, состоящей из трех человек. На множестве  студентов зададим отношение *R* — «учится лучше». Пусть первым способом задано отношение *R* следующим образом:  Тогда можно составить матрицу *А* отношений *R*, состоящую из нулей и единиц, в которой



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 1 |
|  | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 |

Граф отношений, в котором стрелки направлены в сторону менее предпочтительного студента, показан на рис. 1.

Рис. 1. Графовый способ задания отношений







Сечения задаются по каждому элементу множества *Х*. Различают верхнее сечение  и нижнее —  Верхним сечением для *х* называется множество элементов из *Х*, предпочтительных относительно рассматриваемого *х*. Нижним сечением для *х* называется множество элементов из *Х* менее предпочтительных *х*.

{Ø — пустое множество}; 

{Ø}; {Ø}.

В приведенном примере отношения *R* заданы не на всем множестве *Х*. Если не все элементы сравнимы по отношению *R*, то оно называется неполным (несовершенным, нелинейным, частичным). На всем множестве объектов *Х* могут быть установлены ***отношения эквивалентности, строгого порядка и нестрогого порядка***. Напомним, что отношение эквивалентности содержательно интерпретируется как взаимозаменяемость, одинаковость объектов. Часто отождествляют понятия эквивалентности, равноценности и несравнимости. Отношение эквивалентности порождает разбиение множества объектов на классы, объединяющие неразличимые объекты по одному либо группе критериев. В приведенном примере  и  находятся в отношении эквивалентности ~.

Отношение строгого порядка может интерпретироваться как предпочтительность одного объекта по сравнению с другим, например, «лучше», «важнее», «старше» и т.д. В приведенном примере  учиться лучше  и ,  и . Отношение строгого порядка порождает строгое упорядочение по предпочтительности. Если бы добавили, например, отношение , то получили бы строгий порядок .

В случае строгого упорядочения объектов по предпочтительности П. Фишберном доказана теорема, что можно построить функцию полезности  такую, что для  Определение функции позволяет перейти от языка бинарных отношений к критериальному языку, взяв в качестве критериальной функции.

Отношение нестрогого порядка есть объединение отношений строгого порядка и эквивалентности, оно интерпретируется как предпочтительность либо эквивалентность  объектов ( не хуже ). Отношение полного нестрогого порядка порождает строгое упорядочение классов эквивалентности объектов. Если добавим отношения  и получим порядок ~).

Альтернатива в ЗПР может быть представлена описанием в критериальном пространстве. Через критериальное пространство на множестве альтернатив можно установить бинарные отношения.

Обозначим:

— вектор оценок альтернативы *х*;

— вектор оценок альтернативы *y*.

Введем на альтернативах *x* и *y* отношения строгого предпочтения (отношение Парето), равноценности и несравнимости для равнозначных критериев.

#### Отношение Парето

Объекты *х* и *y* находятся в отношении Парето *Р* (строгого предпочтения), если для всех критериев оценки и хотя бы по одному критерию *j* оценка 

.

Пример

Установить отношения Парето для *x*, *y*, *z*, если *х* = (5,5,5,5); *у* = (5,4,5,5); *z* = (5,5,5,4). Сравнивая попарно критерии для всех альтернатив, получим



***Отношение равноценности I***

Объекты *х* и *у* находятся в отношении равноценности *I*, если для всех критериев оценки 



***Отношение несравнимости N***

Объекты *х* и *y* находятся в отношении несравнимости *N*, если хотя бы по одному критерию *i* оценка и найдется другой критерий *j*, для которого оценка .

.

Отношение Парето на всем множестве альтернатив позволяет установить множество предпочтительных (недоминируемых) альтернатив, верхнее сечение которых пусто. Данное множество называют ***множеством Парето***, внутри него выполняются отношения несравнимости. При необходимости же выбора из множества Парето более предпочтительных следует привлекать дополнительные соображения: вводить новые отношения (например, мажоритарное, лексиграфическое и др.), новые критерии и ограничения, привлекать экспертов либо бросать жребий.

Выбор альтернатив в целом целесообразно производить в два этапа: определение множества Парето, затем определение подмножества более предпочтительных альтернатив из множества Парето.

Ниже рассмотрим некоторые из отношений, которые позволяют «сузить» множество Парето.

***Мажоритарное отношение*** 

Идейная основа мажоритарного отношения — это принцип выбора лучшего решения на основе голосования. Предполагается, что критерии равнозначимы и утверждение «*x* предпочтительней *y*» выполняется тогда и только тогда, когда x превосходит *y* по большему числу оценок, чем *y* превосходит *x*. Формально  определяется:



где 

##### Пример

Пусть  Очевидно, что имеет место 

***Отношение лексикографии ***

Предполагается, что критерии упорядочены по важности значимости. Пусть критерий первый важнее второго, второй — третьего и т.д. Отношение лексикографии определяется:



***Отношения Подиновского*** **

а) для равноважных критериев имеет место отношения предпочтения  и эквивалентности по Подиновскому:





б) для разноважных критериев (пусть упорядочены по убыванию важности) имеет место отношения:





*Пример*

Пусть 

а) для равноважных — 

б) для разноважных — 

**Метод порогов несравнимости «ЭЛЕКТРА»**

В методе «ЭЛЕКТРА» разработана процедура многокритериального выбора наиболее предпочтительных объектов, включающая следующие этапы.

1. Для каждого из критериев вводится дискретная шкала возможных значений этого критерия, весовые коэффициенты критериев.

2. Для каждого из критериев строится граф, вершинами которого являются отдельные объекты множества, а дуги указывают на отношение доминирования между объектами в соответствии с данным критерием.

3. С учетом важности критериев и предпочтительности объектов вычисляются матрицы значений специальных коэффициентов, называемых индексами согласия и несогласия.

4. Для каждой пары объектов  считается установленным отношение превосходства, скажем *х* над *у*, если значение соответствующего индекса согласия больше некоторого порогового значения, а индекс несогласия – меньше соответствующего порогового значения.

5. Строится обобщенный граф превосходства, структура которого зависит от выбранных пороговых значений.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть Х представляет собой множество абитуриентов, принимающих участие в конкурсных экзаменах при поступлении в технический вуз. На основании проведенных экзаменов необходимо отобрать лучших кандидатов. Состав дисциплин и возможные способы оценки абитуриентов по дисциплинам могут варьироваться согласно специфическим особенностям вуза. Рассмотрим этапы процедуры «ЭЛЕКТРА».

1. В качестве примера рассмотрим оценки трех абитуриентов по трем дисциплинам в пятибалльной шкале (табл. 1).

Таблица 1 - Оценки вступительных экзаменов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Абитуриенты | Дисциплина | | |
|  | Математика | Физика | Литература |
| *x* | 5 | 3 | 4 |
| *y* | 5 | 4 | 3 |
| *z* | 4 | 5 | 3 |

Обозначим: — множество оцениваемых объектов;

— оценка объекта *x* по критерию 

— весовой коэффициент критерия  

Пусть 

2. Для каждого критерия i строим граф  где — множество дуг графа  (рис. 2). Дуга в графе из вершины *х* в вершину у существует, если  Равенство оценок  в графе влечет наличие двух дуг из *х* в *у* и из *у* в *х*.



***z***

***у***

***х***

***z***

***у***

***х***

***z***

***у***

***х***

*а*)

*б*)

*в*)

Рис. 2. Графы отношений по математике (а), физике (б) и литературе (в)

Построим объединенный граф  где  есть пересечение трех графов с дугами  (рис. 3). В нашем примере {Ø}, т.к. в трех графах нет дуг, одновременно совпадающих по направлению. Объединенный граф характеризует полное согласие превосходства одних объектов над другими.

***z***

***у***

***х***

Рис. 3. Объединенный граф

3. Строим матрицу индексов согласия превосходства объектов и матрицу индексов несогласия с этим превосходством.

Рассмотрим пару объектов  Применительно к ней множество всех критериев может быть разбито на два «противоположных» класса. К первому классу  отнесем все критерии , для которых  т.е. критерии, согласно которым в графах  имеет место дуга (*х*, *у*): .

В примере   где —математика, — физика, — литература.

Ко второму классу  пары объектов  отнесем критерии , для которых отсутствуют в графах  дуги : .

В примерах 



Рассчитываем матрицу для индексов согласия по формуле



где — весовой коэффициент критерия ; .

Матрица индексов согласия будет иметь вид

*x y z*

.

Индексы согласия в матрице могут изменяться от 0 до 1 и выражают степень согласия о предпочтении *х* над *у*.

Рассчитываем матрицу для индексов несогласия по формуле



где *d* — нормирующий коэффициент, равный максимальному разбросу оценок на всем множестве критериев.

Матрица индексов несогласия будет иметь вид

*x y z*

.

Индексы несогласия в матрице могут изменяться от 0 до 1 и выражают степень несогласия, недоверия к превосходству х над у.

Абсолютная уверенность в превосходстве х над у будет при  и . В объединенном графе  в этом случае будет дуга (х,у).

4. Вводится отношение превосходства на объектах через пороговые значения p и q. Значение порога p вводится для индексов согласия и должно быть ближе к единице, значение порога q вводится для индексов несогласия и должно быть ближе к нулю. Говорят, что объект *х* превосходит объект *у*, если т.е. выполняются следующие условия:

* совокупность критериев (с учетом их относительной важности) по которым достаточна представительна (порог *p*);
* оценки по остальным критериям не дают достаточных оснований (порог *q*) для отказа о превосходстве , степень недоверия к этому предположению не выходит за допустимый предел 

5. Обобщенный граф превосходства  при  представлен на рис. 3. В графе появится дополнительная дуга (рис.4), например, если верхний порог  а нижний порог Всегда является частичным графом если 

***z***

***у***

***х***

Рис. 4. Обобщенный граф G(0,8;0,5) П

***Варианты заданий***

Установить на множестве альтернатив отношения:

1.Парето

2. Мажоритарное

3. Лексикографическое

4. Подиновского (для Разноважных критериев)

5. По методу «Электра». Критерии следует максимизировать (кроме первого).

***Варианты заданий***:

**Вариант 1:** Х1, Х2, Х3;

**Вариант 2:** Х2, Х3, Х4;

**Вариант 3**: Х3, Х4, Х5;

**Вариант 4**: Х4, Х5, Х6;

**Вариант 5:** Х5, Х6, Х1;

**Вариант 6:** Х6, Х1, Х2;

**Вариант 7:** Х1, Х3, Х6;

**Вариант 8:** Х2, Х4, Х6;

**Вариант 9:** Х1, Х2, Х7;

**Вариант 10**: Х2, Х3, Х7;

**Вариант 11**: Х3, Х4, Х7;

**Вариант 12**: Х4, Х5, Х7;

**Вариант 13**: Х9, Х2, Х3;

**Вариант 14**: Х9, Х3, Х4;

**Вариант 15**: Х9, Х4, Х5;

**Вариант 16**: Х4, Х8, Х6;

**Вариант 17**: Х1, Х8, Х3;

**Вариант 18**: Х2, Х3, Х8;

**Вариант 19**: Х3, Х4, Х9;

**Вариант 20**: Х7, Х1, Х6;

**Вариант 21**: Х9, Х2, Х3;

**Вариант 22**: Х6, Х7, Х8;

**Вариант 23**: Х7, Х8, Х9;

**Вариант 24**: Х4, Х5, Х8;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Альтернативы | Бег 100м (в сек) | Рост (в см.) | Вес (в кг) | Псих.подгот.  (классиф. шкала) | Мор-волевая  (в баллах) |
| Х1 | 15 | 200 | 100 | Низкая | 10 |
| Х2 | 14 | 210 | 110 | Средняя | 5 |
| Х3 | 13 | 190 | 90 | Высокая | 8 |
| Х4 | 12 | 180 | 70 | Средняя | 4 |
| Х5 | 11 | 170 | 80 | Высокая | 5 |
| Х6 | 10 | 160 | 90 | Низкая | 8 |
| Х7 | 13 | 190 | 110 | Средняя | 4 |
| Х8 | 11 | 200 | 100 | Высокая | 3 |
| Х9 | 14 | 180 | 90 | Низкая | 5 |
| Значимость  критерия | 10 | 5 | 13 | 7 | 15 |